

Σενάριο

Η Έννοια του Ορίου στο $x_0 \in R$

Εκπαιδευτικός: Στέφανος Μακαριάδης ΠΕ 03

Γνωστική περιοχή:

Μαθηματικά Γ' Λυκείου – Β' Μέρος (Ανάλυση) § 1.4

Θέμα:

Το προτεινόμενο σενάριο απευθύνεται σε μαθητές της Γ' Λυκείου και αναφέρεται στο Β' Μέρος (Ανάλυση) και στην παράγραφο 1.4 "Όριο συνάρτησης στο ".

$$x_0 \in R$$

Οι μαθητές εμπλέκονται με δραστηριότητες που αφορούν την κατανόηση της έννοιας του ορίου μιας συνάρτησης f σε σημείο $x_0 \in R$. Επίσης αντιλαμβάνονται την αναγκαιότητα της εισαγωγής των εννοιών των πλευρικών ορίων μιας f σε σημείο $x_0 \in R$. Η κατανόηση των εννοιών απαιτούν σύνθετες νοητικές λειτουργίες και απαιτούνται πολλές αναπαραστάσεις εννοιών και πρέπει να ενισχυθούν με πρόσθετα εργαλεία διδασκαλίας και τον σωστό καθοδηγητικό ρόλο του διδάσκοντα.

Τεχνολογικά εργαλεία:

Το σενάριο προτείνεται να διεξαχθεί στο εργαστήριο πληροφορικής με τη χρήση του λογισμικού Geogebra.

Σκεπτικό:

Βασική ιδέα:

Οι μαθητές με τη βοήθεια της ψηφιακής τεχνολογίας θα διερευνήσουν και θα ανακαλύψουν την έννοια του ορίου σε ένα $x_0 \in R$. Ποιο συγκεκριμένα αξιοποιώντας τη δυνατότητα του λογισμικού Geogebra και με τη δυνατότητα δυναμικής προσέγγισης, οι μαθητές θα προσπαθήσουν να ανακαλύψουν και να διερευνήσουν τον τρόπο με τον οποίο το x πλησιάζει μια τιμή στον άξονα x' (από αριστερά ή από δεξιά) και τον τρόπο με τον οποίο το y πλησιάζει ή όχι μια τιμή στον άξονα y' καθώς ένα σημείο κινείται πάνω στην καμπύλη μιας συνάρτησης f . Έτσι οι μαθητές θα ανακαλύψουν την ύπαρξη του $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και θα γράφουν

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ ή τη μη ύπαρξη του ορίου αν τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά.

Οι κινήσεις αυτές είναι δυνατόν να οπτικοποιηθούν και να γίνουν δυναμικές αν η διδασκαλία υποστηριχτεί στο λογισμικό Geogebra με ένα παράθυρο C.A.S και ένα υπολογιστικό φύλο.

Προστιθέμενη αξία:

Το προτεινόμενο εκπαιδευτικό σενάριο φιλοδοξεί να συμβάλει στην αλλαγή - βελτίωση της στάσης των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά και στη διαδικασία προσέγγισής τους.

Οι μαθητές αναμένεται να συνειδητοποιήσουν ότι τα Μαθηματικά μπορούν να αποτελέσουν αντικείμενο διερεύνησης και μάλιστα κάθε μαθητής μπορεί να

δοκιμάσει στο πλαίσιο αυτό τις δικές του ιδέες και να καταλήξει στα δικά του συμπεράσματα τα οποία πρέπει να έχουν την ανάλογη κοινωνική αποδοχή (στο πλαίσιο της τάξης) και την επιστημονική τεκμηρίωση. Η χρήση των τεχνολογικών εργαλείων αναμένεται να διευκολύνει σημαντικά προς αυτή τη κατεύθυνση. Η εργασία των μαθητών σε ομάδες και η στενή, συνεχής και συγκροτημένη συνεργασία μεταξύ των μαθητών της κάθε ομάδας προφανώς θα συμβάλει στην αλλαγή της στάσης τους απέναντι στη μάθηση.

Πλαίσιο εφαρμογής:

Σε ποιους απευθύνεται:

Το σενάριο απευθύνεται σε μαθητές της Γ' Λυκείου και αναφέρεται στο Β' Μέρος (Ανάλυση) και στην παράγραφο 1.4

''Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in R$ ''.

Χρόνος υλοποίησης:

Για την εφαρμογή του σεναρίου εκτιμάται ότι απαιτούνται 3 διδακτικές ώρες. Εναλλακτικά μπορεί να διατεθεί 2 διδακτικές ώρες για την υλοποίηση μέρους του σεναρίου και 1 ώρα δραστηριότητες να δοθούν ως εργασία στον ελεύθερο χρόνο των μαθητών.

Χώρος υλοποίησης:

Το σενάριο προτείνεται να διεξαχθεί εξ' ολοκλήρου στο εργαστήριο υπολογιστών ή το υπόλοιπο να δοθεί υπό τη μορφή εργασίας στον ελεύθερο χρόνο των μαθητών.

Προαπαιτούμενες γνώσεις:

Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν:

Για τη διεξαγωγή του σεναρίου απαιτείται:

- Υπολογιστής ή τάμπλετ για κάθε δύο μαθητές.
- Το λογισμικό Geogebra.
- Ένα φύλλο εργασίας.

Ως προς τα μαθηματικά:

Οι μαθητές πρέπει να αναγνωρίζουν:

- τον υπολογισμό του πεδίου ορισμού της συνάρτησης
- τις συναρτήσεις πολλαπλού τύπου
- τις γραφικές παραστάσεις των βασικών συναρτήσεων
- την παραγοντοποίηση των αλγεβρικών παραστάσεων και
- την απλοποίηση των κλασματικών παραστάσεων.

- Στοιχειώδη χειρισμό του προγράμματος Geogebra

Ως προς την τεχνολογία:

Οι μαθητές θα πρέπει να χρησιμοποιούν βασικές λειτουργίες του υπολογιστή.

Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία:

Στους μαθητές θα δοθεί κατάλληλο φύλλο εργασίας που θα εκπονήσει ο διδάσκοντας και αναλυτικές οδηγίες (προφορικά ή γραπτά) για την υλοποίηση του σεναρίου.

Κοινωνική εννοχήστρωση της τάξης:

Οι μαθητές τις 2 πρώτες ώρες εργαζόμενοι σε δυάδες και καθοδηγούμενοι από τον εκπαιδευτικό θα αναπτύξουν τις δραστηριότητες που θα οδηγήσουν στη σταδιακή ανακάλυψη της νέας γνώσης. Την τρίτη ώρα οι μαθητές θα εργαστούν σε ομάδες των τεσσάρων ατόμων με φύλλο εργασίας, καλούνται να εξερευνήσουν συγκεκριμένα σχήματα και να απαντήσουν σε συγκεκριμένες ερωτήσεις. Επομένως η διερεύνηση αυτή θα γίνει συνεργατικά. Για να υπάρχει κοινός στόχος και καλή συνεργασία οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν ένα κοινό φύλλο εργασίας που περιέχει ερωτήσεις σχετικές με το θέμα.

Στη διάρκεια της υλοποίησης του σεναρίου ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να ελέγχει τα συμπεράσματα των μαθητών, να συνεργάζεται μαζί τους, να τους καθοδηγεί ώστε να αντιλαμβάνονται καλύτερα τα αποτελέσματά τους και να τους ενθαρρύνει να συνεχίσουν την διερεύνηση.

Η επικοινωνία όλων των μαθητών της τάξης με τις εργασίες των συμμαθητών τους και η συλλογική διερεύνηση κρίσιμων παραμέτρων της διερεύνησης μπορεί επίσης ενισχυθεί με κατάλληλη χρήση του διαδραστικού πίνακα σε διαφορετικές πτυχές της εφαρμογής των δραστηριοτήτων του σεναρίου.

Στόχοι:

Από την εφαρμογή του συγκεκριμένου σεναρίου οι μαθητές θα μάθουν να ανακαλύπτουν τη γνώση συνεργατικά, να πειραματίζονται, να παρατηρούν, να ανταλλάσσουν απόψεις και να διατυπώνουν εικασίες.

Επίσης με τη βοήθεια των προτεινόμενων εργαλείων δυναμικού χειρισμού (δρομείς) και των μετακινούμενων σημείων στην γραφική παράσταση θα κατανοήσουν την έννοια του ορίου μιας συνάρτησης f στο $x_0 \in R$, προκειμένου να προκύψουν σωστά εποπτικά συμπεράσματα.

Πιο συγκεκριμένα οι μαθητές μετά την ολοκλήρωση αυτής της διδασκαλίας:

1. Θα έχουν ανακαλύψει την έννοια του ορίου $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.
2. Θα έχουν διερευνήσει πότε έχει νόημα η μελέτη του $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ όταν:
 - ο f πρέπει να ορίζεται όσο θέλουμε “κοντά στο x_0 ”, δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ’ ένα σύνολο της μορφής
$$(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta) \quad (\alpha, x_0) \quad (x_0, \beta)$$
 - Το x_0 μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης ή να μην ανήκει σ’ αυτό.
 - Η τιμή της f στο x_0 , όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο x_0 ή διαφορετική από αυτό.

3. Θα έχουν διερευνήσει την έννοια και τη σημασία της χρήσης των πλευρικών ορίων της f σε ένα σημείο $x_0 \in R$.

4. Θα έχουν κατανοήσει το κριτήριο ύπαρξης ορίου και να καταλήξουν στη διατύπωση του κανόνα :

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$$

Ανάλυση του σεναρίου:

1^η διδακτική ώρα

Ροή εφαρμογής των δραστηριοτήτων:

Αρχικά θα δοθούν κάποιες οδηγίες για τη χρήση του λογισμικού. Επίσης οδηγίες για τη χρήση δρομέων ή "σύρσιμο" του ποντικιού ή αυτόματη κίνηση ώστε οι μαθητές να διερευνήσουν τις δυναμικές κινήσεις των x και y , καθώς ένα σημείο κινείται πάνω στην καμπύλη μιας συνάρτησης f .

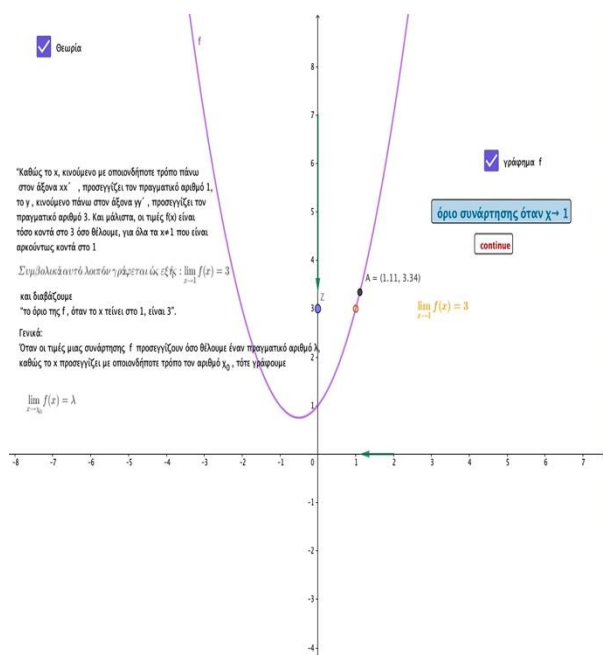
Τα διαδραστικά εργαλεία και οι δυναμικές μεταβολές βοηθούν σε πολύ μεγάλο βαθμό τους μαθητές που έχουν μαθησιακές δυσκολίες στην κατανόηση των εννοιών στο μάθημα των Μαθηματικών. Με τη βοήθεια του προτεινόμενου λογισμικού, των διαδραστικών και δυναμικών εργαλείων και του ποντικιού, θα μπορούν να συμμετέχουν ενεργά στη μαθησιακή διαδικασία και θα μπορούν μόνοι τους να παρατηρήσουν και να κατανοήσουν τις έννοιες των ορίων και πλευρικών ορίων. Οι μαθητές κατά την εκτέλεση αυτού του σεναρίου θα εμπλακούν στις παρακάτω δραστηριότητες:

Στη φάση αυτή καλούνται οι μαθητές να εργαστούν με δύο μικροπειράματα με στόχο να εξηγήσει ο εκπαιδευτικός την έννοια και την ύπαρξη του $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ σε

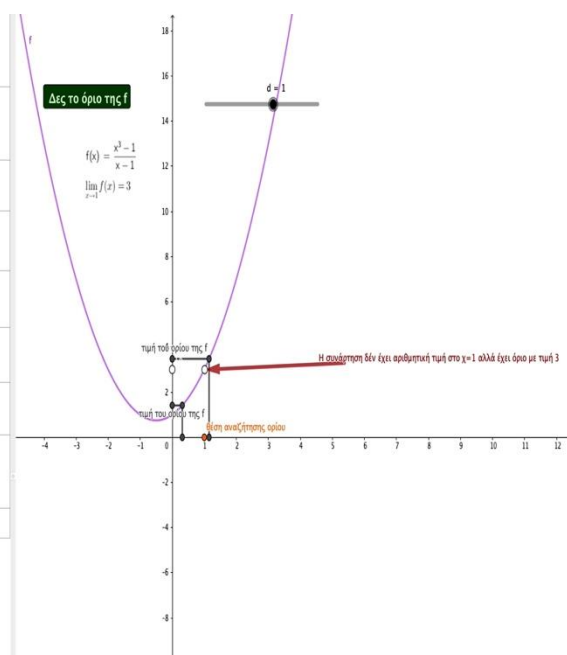
ένα σημείο $x_0 \in R$ όπου το x_0 μπορεί να ανήκει ή όχι στο πεδίο ορισμού της f .

Επίσης όταν ορίζεται η αριθμητική τιμή της συνάρτησης $f(x_0)$, μπορεί να είναι ίσο ή διαφορετικό από το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.

Ζητείται από τους μαθητές να ανοίξουν το αρχείο με όνομα «Limit1.ggb» που βρίσκεται στο μάθημα Μαθηματικά Γ Λυκείου στο e-class.



1	$f(x) = (x^3 - 1)/(x - 1)$
2	$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$
3	$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$
4	$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$
5	$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$
6	$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$
7	$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$
8	$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$
9	$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$



Φάση 1η : “ Η έννοια του ορίου μιας συνάρτησης f σε $x_0 \in \mathbb{R}$ ”

1^ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΑ ΟΜΑΔΑΣ ΜΑΘΗΤΩΝ : 1)
2)

Βήμα 1ο : (με χρήση του αρχείου Limit1.ggb)

Θεωρήστε την συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$.

Ερωτήσεις

α. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f ; $A_f =$

β. Αν αντικαταστήσουμε την τιμή $x=1$ στην f τί παρατηρείτε;

.....
.....

γ. Υπάρχει κάποιος τρόπος ώστε να μπορέσουμε να «εκτιμήσουμε» την τιμή της f όταν το x «προσεγγίζει» την τιμή 1;

.....
.....
.....

δ. Παρατηρώντας τις τιμές της συνάρτησης στο μενού $\rightarrow$ προβολή $\rightarrow$ υπολογιστικό φύλλο απο το Limit1.ggb καθώς το x παίρνει τιμές εκατέρωθεν του 1 (προσεγγίζοντας πλευρικά σε αυτό) τι συμπεράσματα βγάζουμε;

.....
.....
.....
.....

Αν τώρα θέλαμε να βρούμε ένα πιο πρακτικό τρόπο για να υπολογίζουμε την τιμή μιας συνάρτησης:

α. Παρατηρήστε την γραφική παράσταση της συνάρτησης. Με τι είδους συνάρτηση σας μοιάζει;

A. με παραβολή B. με υπερβολή Γ. Με κάποια πολυωνυμική απροσδιόριστης μορφής

Ανοίξτε από το Limit1.ggb μενού $\rightarrow$ προβολή $\rightarrow$ CAS.

Παρατηρήστε τον μετασχηματισμό της f μέσω της παραγοντοποίησης και την αντικατάσταση του $x = 1$ μετά την απλοποίηση.

Η απλοποίηση του παράγοντα $x-1$ από αριθμητή και παρονομαστή μας επιτρέπει να προσεγγίσουμε την τιμή της f στο 1 και με μαθηματικά εργαλεία.

Η διαδικασία ονομάζεται «άρση απροσδιοριστίας» και χρησιμοποιείται στην περίπτωση που το x_0 βρίσκεται εκτός πεδίου ορισμού.

Ανάλυση του 1^{ου} βήματος :

- Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$.
- Ζητείται το πεδίο ορισμού της f και να αντικαταστήσουν την τιμή $x = 1$ στον τύπο της f .
- Αφού οι μαθητές παρατηρήσουν ότι δεν ορίζεται το $f(1)$, προσπαθούν να εκτιμήσουν την τιμή της f όταν το x προσεγγίζει με δυναμικό τρόπο την τιμή 1.
- Επίσης πατώντας στο μενού $\rightarrow$ προβολή $\rightarrow$ υπολογιστικό φύλλο , παρατηρούν τις τιμές της συνάρτησης καθώς το x παίρνει τιμές εκατέρωθεν του 1 (προσεγγίζοντας πλευρικά σε αυτό).
- Στο παράθυρο CAS παρατηρούν τον μετασχηματισμό της f μέσω της παραγοντοποίησης και την αντικατάσταση του $x = 1$ μετά την απλοποίηση.
- Η απλοποίηση του παράγοντα $x - 1$ από αριθμητή και παρονομαστή μας επιτρέπει να προσεγγίσουμε την τιμή της f στο 1 και με μαθηματικά εργαλεία.
- Η διαδικασία ονομάζεται «άρση απροσδιοριστίας» και χρησιμοποιείται στην περίπτωση που το x_0 βρίσκεται εκτός πεδίου ορισμού.

Βήμα 2ο: (με χρήση του αρχείου Limit3.ggb)

Θεωρήστε την συνάρτηση $h(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^4 - 16}$

Ερωτήσεις

α. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h ; $A_h = \dots\dots\dots$

β. Αν αντικαταστήσουμε την τιμή $x = 2$ στην h τί παρατηρείτε;

.....

γ. Μπορείτε να «εκτιμήσετε» την τιμή της h όταν το x «προσεγγίζει» την τιμή 2; (με χρήση του αρχείου Limit3.ggb)

.....
.....
.....

δ. Αν αντικαταστήσουμε την τιμή $x = -2$ στην h τί παρατηρείτε;

.....
.....

ε. Μπορείτε να «εκτιμήσετε» την τιμή της h όταν το x «προσεγγίζει» την τιμή -2; (με χρήση του αρχείου Limit3.ggb)

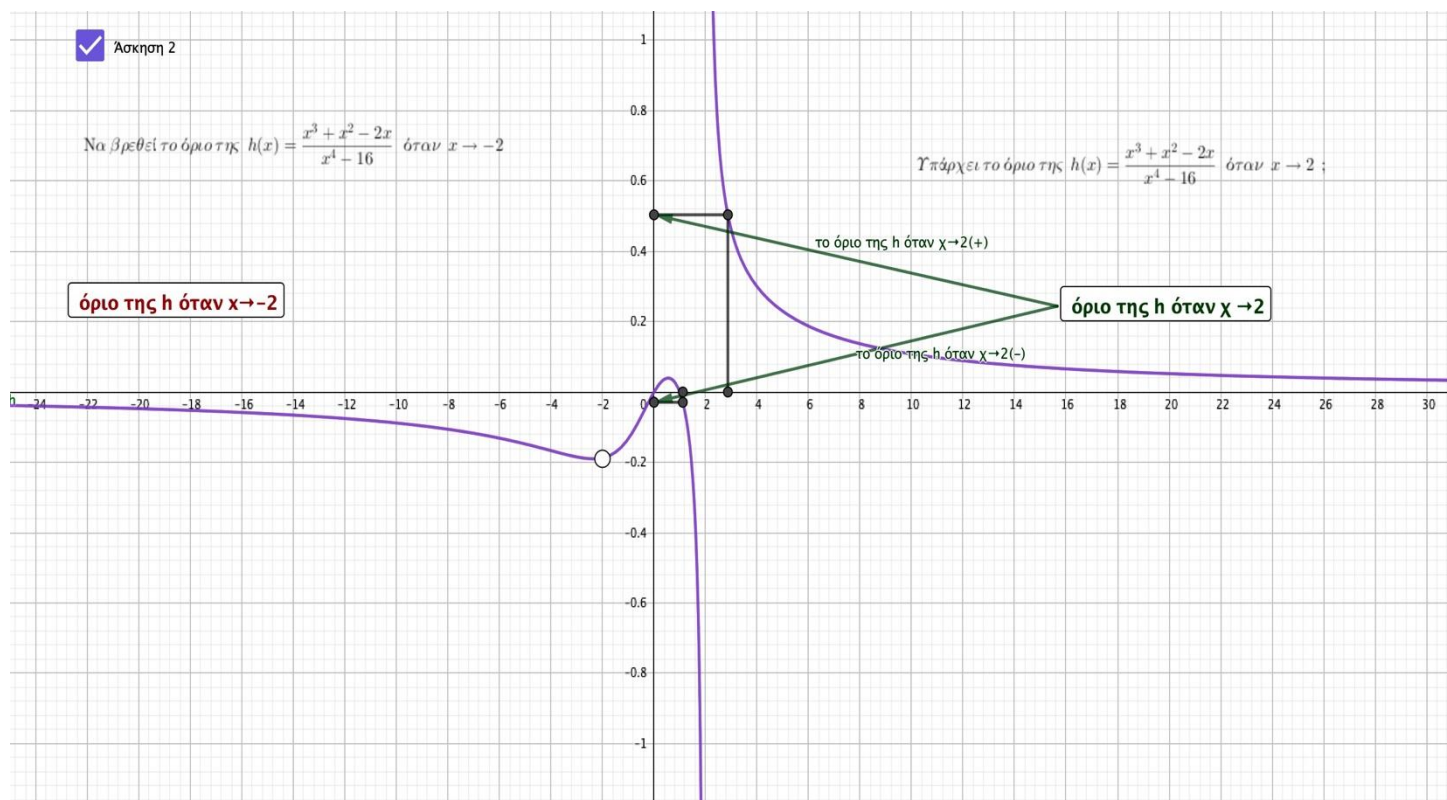
.....

 στ. Αν ναι, μπορείτε να βρείτε αυτή την τιμή χρησιμοποιώντας μαθηματικά εργαλεία; (παραγοντοποιήσεις –απλοποιήσεις , με χρήση του αρχείου Limit3.ggb παράθυρο CAS) :

.....

Ανάλυση του 2^{ου} βήματος :

- Δίνεται η συνάρτηση: $h(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^4 - 16}$.
- Ζητείται το πεδίο ορισμού της h και να αντικαταστήσουν την τιμή $x = 2$ ή την τιμή $x = -2$ στον τύπο της h .
- Αφού οι μαθητές παρατηρήσουν ότι δεν ορίζεται το $h(2)$ και το $h(-2)$, προσπαθούν να εκτιμήσουν την τιμή της h όταν το x προσεγγίζει με δυναμικό τρόπο την τιμή 2 ή την τιμή -2.
- Αφού ανακαλύψουν την έννοια του ορίου $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -2} h(x)$, ζητείται από τους μαθητές να υπολογίσουν αλγεβρικά τις τιμές αυτές των ορίων



(παραγοντοποιήσεις – απλοποιήσεις , με χρήση του αρχείου “ Limit3.ggb”
παράθυρο CAS).

2^η διδακτική ώρα

Φάση 2η : “ Πλευρικά όρια και συναρτήσεις πολλαπλού τύπου ”

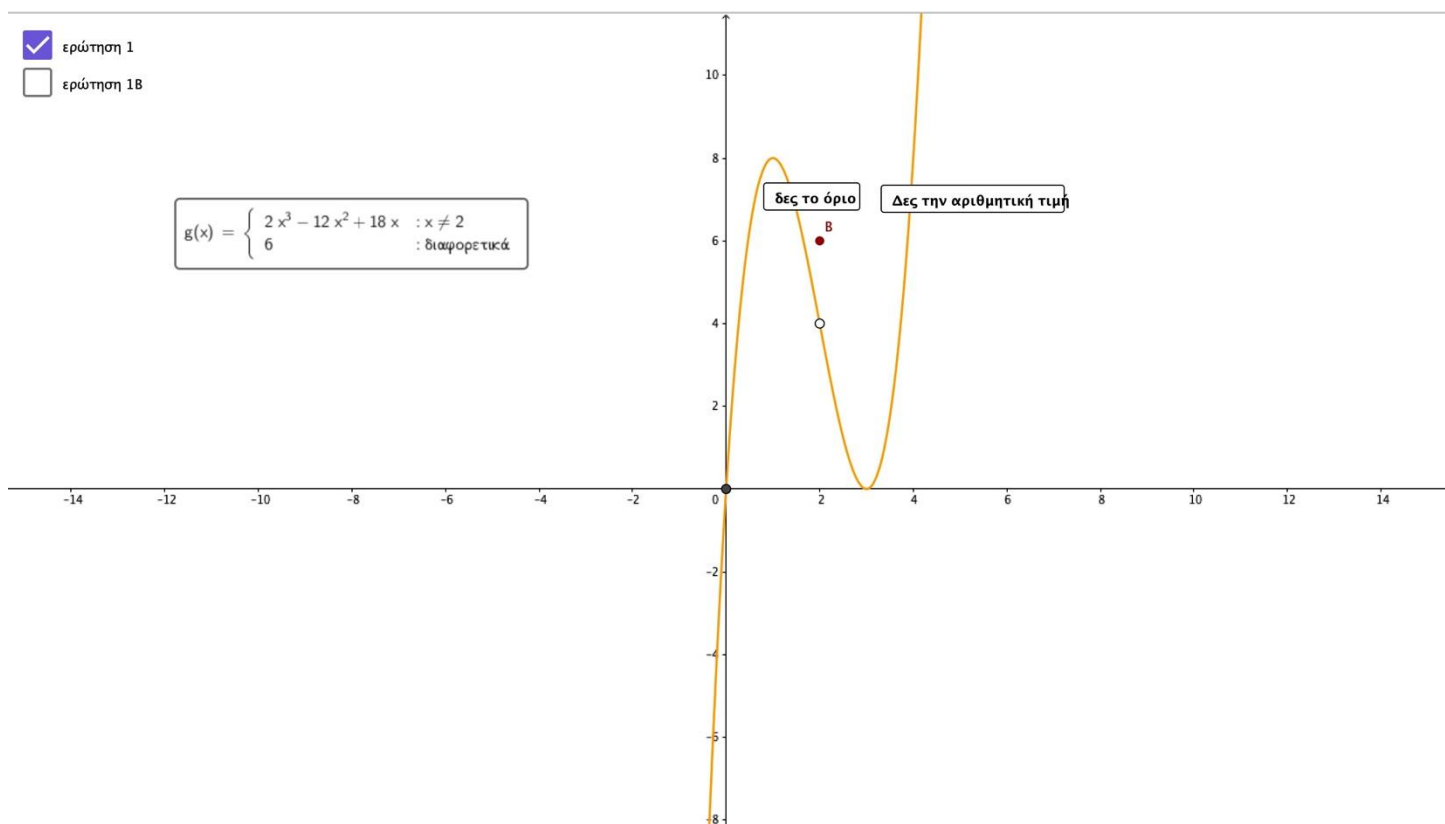
2^ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΑ ΟΜΑΔΑΣ ΜΑΘΗΤΩΝ : 1)
2)

Βήμα 1ο : (με χρήση του αρχείου Limit4.ggb)

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ και το $g(x_0)$, εφόσον υπάρχουν, όταν η γραφική παράσταση

της συνάρτησης g είναι:
$$g(x) = \begin{cases} 2x^3 - 12x^2 + 18x & : x \neq 2 \\ 6 & : \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

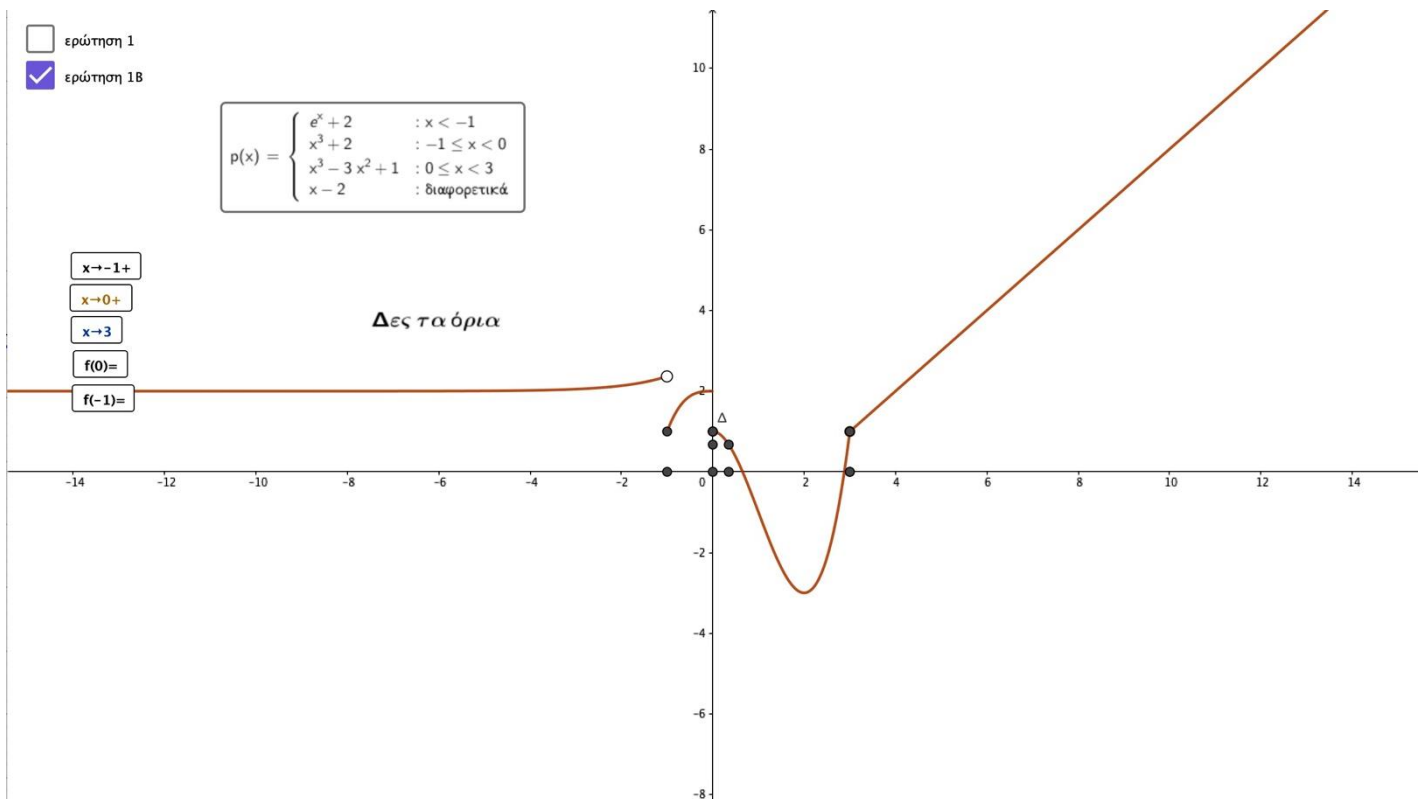


$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \dots\dots\dots$
 $g(2) = \dots\dots\dots$

Βήμα 2^ο : (με χρήση του αρχείου Limit4.ggb)

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow x_0} p(x)$ και το $p(x_0)$, εφόσον υπάρχουν, όταν η γραφική παράσταση της συνάρτησης p είναι:

$$p(x) = \begin{cases} e^x + 2 & : x < -1 \\ x^3 + 2 & : -1 \leq x < 0 \\ x^3 - 3x^2 + 1 & : 0 \leq x < 3 \\ x - 2 & : \text{διαφορετικά} \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow -1^+} p(x) = \dots\dots\dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} p(x) = \dots\dots\dots$$

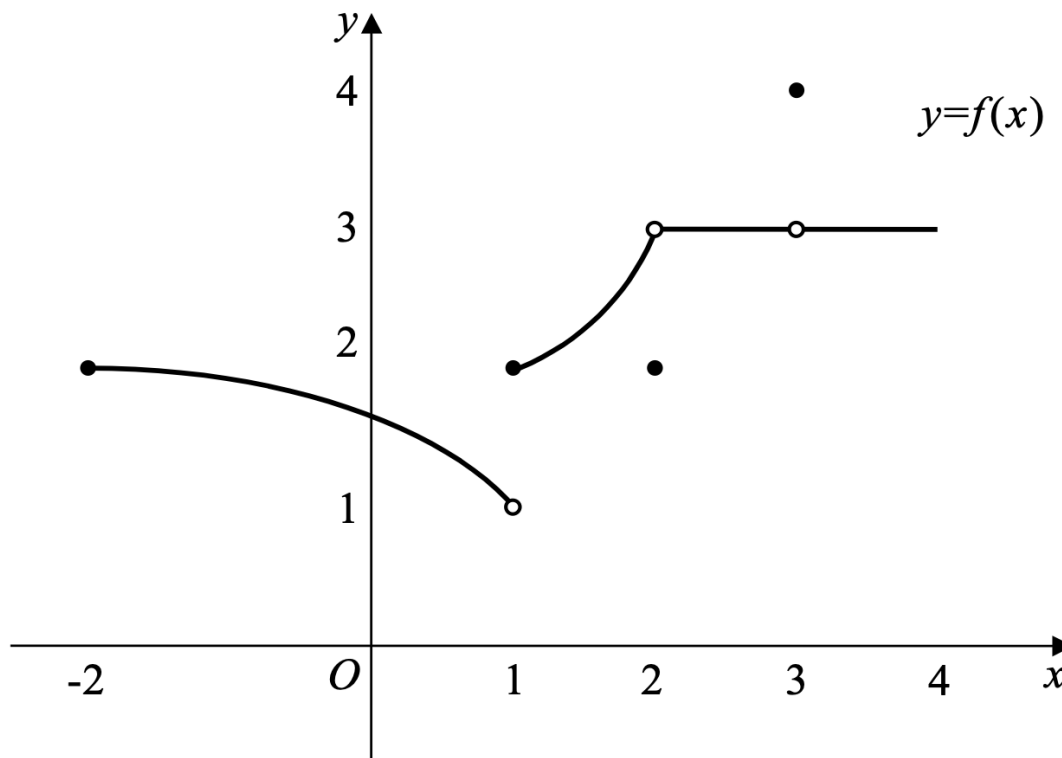
$$\lim_{x \rightarrow 3} p(x) = \dots\dots\dots$$

$$p(-1) = \dots\dots\dots$$

$$p(0) = \dots\dots\dots$$

Βήμα 3^ο : (Εφαρμογή)

Δίνεται η συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο $[-2, +\infty)$ και έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να εξετάσετε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι αληθείς.



- A). $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$ Α Ψ
B). $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ Α Ψ
Γ). $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ Α Ψ
Δ). $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ Α Ψ
Ε). $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$ Α Ψ
ΣΤ). $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 3$ Α Ψ

Το 2^ο φύλλο εργασίας υλοποιείται από τους μαθητές σε ομάδες 2 ατόμων.

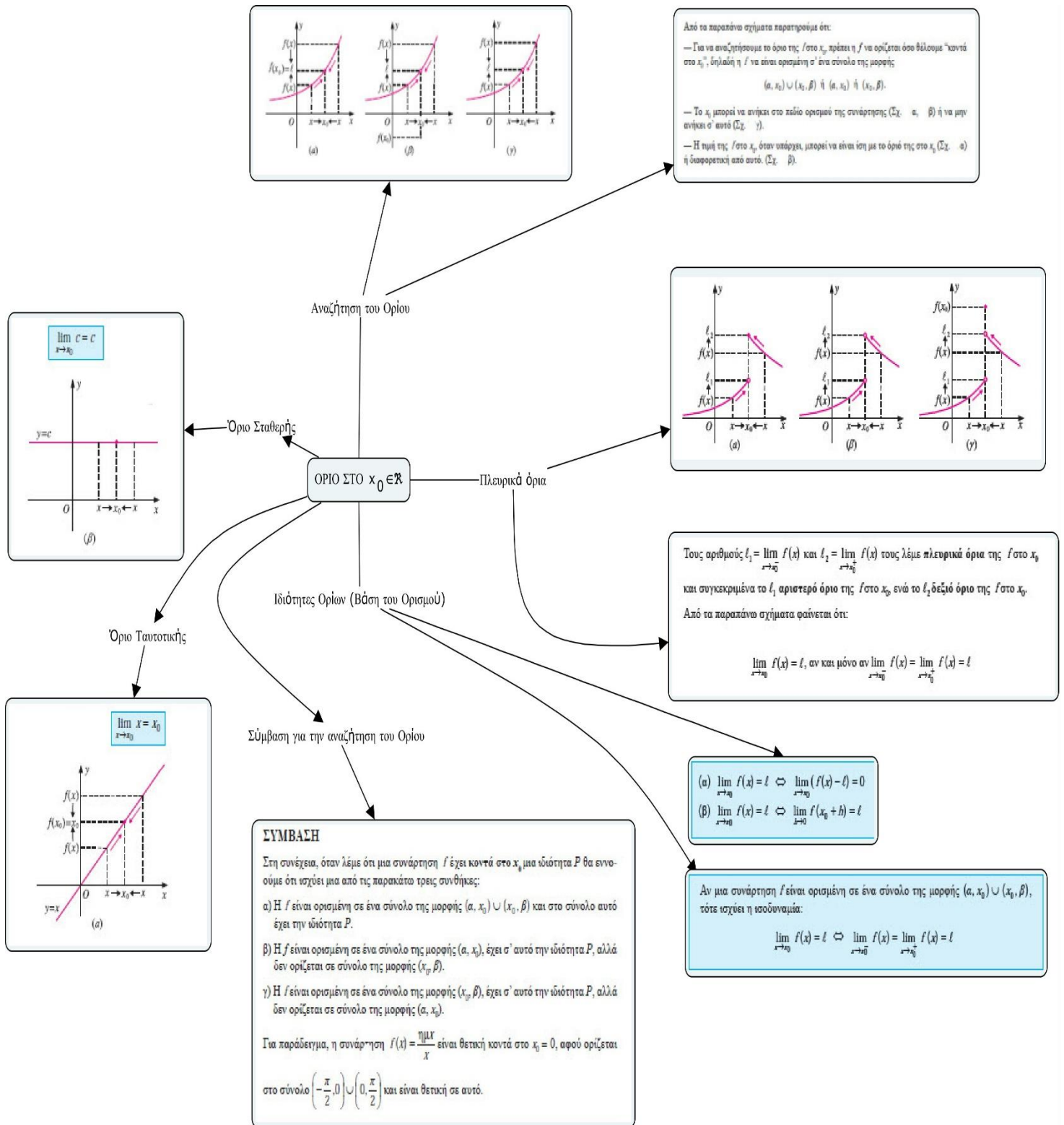
Η διερεύνηση, ο πειραματισμός και η συνεργασία λειτουργούν αναστοχαστικά, με την εμπειρία της προηγούμενης φάσης και αποτελούν δομικό στοιχείο κοινωνικής ενορχήστρωσης της τάξης.

Η διακριτική παρουσία του εκπαιδευτικού λειτουργεί προσθετικά προς τη σωστή, στοχευμένη και ολοκληρωμένη υλοποίηση του φύλλου εργασίας.

3η διδακτική ώρα

(Παρουσίαση της θεωρίας και των ιδιοτήτων των ορίων με το λογισμικό Smartools, ερωτήσεις θεωρίας σε φόρμα Google και Φύλλο εργασίας με ασκήσεις)

Οι εικασίες που θα κάνουν οι μαθητές στα παραπάνω θέματα θα δώσουν την αφορμή να παρουσιαστούν διεξοδικά στην τάξη οι ορισμοί, οι αποδείξεις των σχετικών προτάσεων και φυσικά ο ρόλος της απόδειξης στα Μαθηματικά.



Κατόπιν οι μαθητές θα συνδεθούν στην ιστοσελίδα του παρακάτω συνδέσμου
<https://forms.gle/FYMUX25sEc7ELAo47>
όπου θα απαντήσουν 5 ερωτήσεις θεωρίας.

Όρια στο x_0

makariadis@gmail.com [Εναλλαγή λογαριασμού](#)



* Απαιτείται

Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου *

Η διεύθυνσή σας ηλεκτρονικού ταχυδρομεί...

1. Ερώτηση *

5 βαθμοί

Μια συνάρτηση f έχει όριο στο σημείο x_0 , έναν πραγματικό αριθμό ℓ . Αναγκαστικά το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

- ☐ Σωστό
☐ Λάθος

2. Ερώτηση *

5 βαθμοί

Τα πλευρικά όρια μιας συνάρτησης f , όταν το x παίρνει τιμές κοντά στο x_0 , συμπίπτουν πάντοτε.

- ☐ Σωστό
☐ Λάθος

3. Ερώτηση *

5 βαθμοί

Το όριο μιας συνάρτησης f στο x_0 εξαρτάται από την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό.

- ☐ Σωστό
☐ Λάθος

4. Ερώτηση *

5 βαθμοί

Αν μια συνάρτηση f έχει όριο στο σημείο x_0 , τότε αυτό είναι μοναδικό.

- ☐ Σωστό
☐ Λάθος

5. Ερώτηση *

5 βαθμοί

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα διάστημα που περιέχει το 0. Τότε ισχύει πάντοτε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

- ☐ Σωστό
☐ Λάθος

Υποβολή

Σελίδα 1 από 1

Εκκαθάριση φόρμας

Στη συνέχεια στην τάξη χωρίζονται οι μαθητές σε ομάδες των 4 ατόμων και τους δίνεται το φύλλο εργασίας όπου θα απαντήσουν.

3^ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΑ ΟΜΑΔΑΣ ΜΑΘΗΤΩΝ : 1)
 2)
 3)
 4)

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$

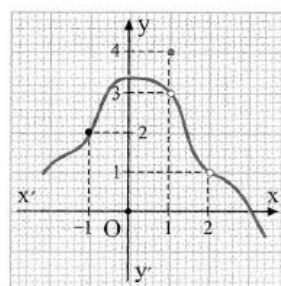
1.

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια και τις τιμές:

α) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ και $f(-1)$,

β) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και $f(1)$,

γ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ και $f(2)$.

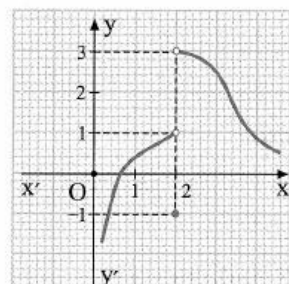


2.

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Να βρείτε αν υπάρχουν, τα:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad \text{και} \quad f(2)$$



3.

Πότε έχει νόημα η αναζήτηση ενός ορίου

Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$:

α) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, όπου $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$

β) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, όπου $f(x) = \frac{x^{11} + 3x^{10} - 2}{x + 1}$

γ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, όπου $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x} - 2}$

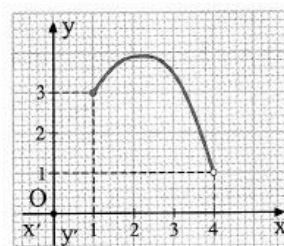
δ) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, όπου $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} + \sqrt{-x^2 - 4x + 5}$

4.

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$,

β) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.



Επέκταση του σεναρίου:

Ως προς την επέκταση του σεναρίου μπορεί να προσαρμοστεί και να χρησιμοποιηθεί στη διδασκαλία της συνέχειας συνάρτησης σε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$.

- Μπορεί να γίνει εισαγωγή του ορισμού (να μην υπάρχει διακοπή στη C_f) της έννοιας της συνέχειας συνάρτησης σε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ δηλαδή

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

- Επίσης μπορεί να εισαχθεί η έννοια της ασυνέχειας συνάρτησης σε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ (να υπάρχει διακοπή στη C_f) δηλαδή

- ✓ να μην ορίζεται το $f(x_0)$ ή
- ✓ να μην ορίζεται το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ή
- ✓ να ορίζονται και τα δύο και να είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Αξιολόγηση μετά την εφαρμογή:

Ως προς τις επιδιώξεις του σεναρίου:

Ο εκπαιδευτικός ελέγχει κατά πόσο επιτεύχθηκαν οι στόχοι του σεναρίου και εξετάζει του λόγους για τους οποίους κάποιοι δεν επιτεύχθηκαν ώστε να παρέμβει ανάλογα στο σενάριο.

Ως προς τα εργαλεία:

Ο εκπαιδευτικός ελέγχει την ευκολία με την οποία οι μαθητές αξιοποίησαν τα εργαλεία του προτεινόμενου λογισμικού. Αφού αξιολογήσει τα δεδομένα του επεμβαίνει ανάλογα στο σενάριο για την επόμενη εφαρμογή.

Ως προς την διαδικασία υλοποίησης:

Ο εκπαιδευτικός αξιολογεί την διαδικασία υλοποίησης του σεναρίου αξιολογώντας τα στοιχεία που δεν δούλεψαν καλά και προσαρμόζει το σενάριο.

Ως προς την προσαρμογή και επεκτασιμότητα:

Η δυνατότητα επέκτασης του σεναρίου και η ευκολία προσαρμογής σε ένα σχολικό περιβάλλον το καθιστούν σημαντικό. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να λάβει σοβαρά υπόψη του αυτές τις παραμέτρους και να προσαρμόσει το σενάριο ανάλογα. Ιδιαίτερα όταν εφαρμόσει το σενάριο πολλές φορές και σε διαφορετικές τάξεις ή ανταλλάξει ιδέες με άλλους συναδέλφους του θα έχει δεδομένα με τα οποία θα μπορεί να κάνει ουσιαστικές προσαρμογές.

Σχεδίαση φύλλου εργασίας:

Στην ανάλυση του σεναρίου περιγράφονται οι επιμέρους δραστηριότητες με τις οποίες προτείνεται να εμπλακούν οι μαθητές καθώς και η χρονική σειρά με την οποία αυτό θα γίνει. Επομένως, η σύνταξη του φύλλου εργασίας από τον εκπαιδευτικό που θα διδάξει το σενάριο πρέπει να συμπεριλάβει τις δραστηριότητες αυτές με την ίδια ροή και τις κατάλληλες ερωτήσεις – προβλήματα προς τους μαθητές.

Απώλεια διδακτικού χρόνου:

Σε αυτήν την περίπτωση, πρέπει να δημιουργηθεί ένα σχέδιο που θα επιτρέψει την επαναφορά της απώλειας διδακτικού χρόνου.

Πρώτα από όλα, πρέπει να αναλυθούν οι ανάγκες των μαθητών και να καθοριστούν ποια θέματα είναι πιο σημαντικά. Μετά από αυτό, πρέπει να επανασχεδιαστεί το σενάριο μαθήματος και να καθοριστούν οι δραστηριότητες που θα πραγματοποιηθούν στην τάξη.

Η χρήση τεχνολογιών, όπως το διαδικτυακό μάθημα, το ηλεκτρονικό βιβλίο ή η χρήση εκπαιδευτικών εφαρμογών και εργαλείων είναι μία άλλη εναλλακτική μέθοδος.

Επίσης, παρουσιάζοντας την ύλη της ενότητας σε μια λογική ακολουθία και δίνοντας έμφαση στις βασικές έννοιες και δεξιότητες.

Τέλος, ο εκπαιδευτικός πρέπει να αναλύσει την αποτελεσματικότητα του πλάνου του και να προσαρμόσει την προσέγγισή του στο σενάριο έκτακτης συνθήκης.

Συνολικά, για να αντιμετωπίσει αποτελεσματικά την απώλεια διδακτικού χρόνου, ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να έχει ένα σχέδιο δράσης που λαμβάνει υπόψη τις ανάγκες των μαθητών του.

Συγκεκριμένα στο σενάριο που παρουσιάσαμε μπορούμε την 3η διδακτική ώρα να την μεταφέρουμε για εργασία στο σπίτι των μαθητών μας. Δηλαδή μπορούμε να ανεβάσουμε την παρουσίαση της θεωρίας – τυπολόγιο που έγινε στο smart tool στο e-class όπως και το 3 φύλλο εργασίας.

Ανατροφοδότηση του Σεναρίου:

Το σενάριο εφαρμόστηκε στην Γ Λυκείου στο τμήμα Θετικών Σπουδών.

Ως προς το λογισμικό geogebra και γενικά ως προς τους υπολογιστές του εργαστηρίου πληροφορικής τα πράγματα κύλησαν ομαλά, αν και χρειάστηκαν 10 λεπτά για την κατανομή των μαθητών ανά 2 σε κάθε υπολογιστή και η εύρεση του προγράμματος και των αρχείων.

Ως προς την ροή του σεναρίου δεν υπήρξε πρόβλημα και οι μαθητές ακολουθούσαν τα βήματα των δραστηριοτήτων όπως τα περιγράψαμε στο σενάριο.

Στην τρίτη ώρα του σεναρίου που έπρεπε οι μαθητές να συνδεθούν στην ιστοσελίδα που βρισκόταν η φόρμα ερωτήσεων Σ-Λ, οι μαθητές ανταποκρίθηκαν ικανοποιητικά όπως φαίνεται στο φύλλο excel που επισυνάπτουμε συνημμένα.

Το 3^ο φύλλο εργασίας που τους δόθηκε για εφαρμογή του σεναρίου και του μαθήματος «Όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$ » οι μαθητές χωρίστηκαν σε 6 ομάδες των 4 μαθητών και απάντησαν στις 4 ερωτήσεις.

Οι μαθητές ανταποκρίθηκαν ικανοποιητικά όπως φαίνεται στο αρχείο Εφαρμογή στο Όριο x_0 .pdf που επισυνάπτουμε συνημμένα.

Ελέγχοντας το 3^ο φύλλο εργασίας φάνηκε η αδυναμία των μαθητών να κατανοήσουν σε ποιο ή σε ποια σημεία κάνουμε αναζήτηση του ορίου, πότε ορίζεται το όριο και πότε υπάρχει το όριο.

Άρα εκεί οφείλουμε να στρέψουμε την προσοχή μας στην επανεξέταση του σεναρίου και να δώσουμε στους μαθητές να καταλάβουν με κατάλληλες δραστηριότητες σε ποια σημεία αναζητούμε το όριο, πότε ορίζεται και πότε υπάρχει το όριο.